



UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA LA MOLINA

FUNDAMENTOS Y APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL

LEANDRO ANTERO HUANCA VELARDE
ALFREDO DEMETRIO MORENO LLACZA

2012

UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA LA MOLINA

Dr. JESÚS ABEL MEJÍA MARCACUZCO
Rector

Dr. JORGE LUIS ALIAGA GUTIÉRREZ
Vicerrector Académico

Mg.Sc. EFRAÍN DONALD MALPARTIDA INOUYE
Vicerrector Administrativo

Mg.Sc. MARÍA BEATRIZ OLAYA MORALES
Jefe de EDIAGRARIA

FUNDAMENTOS Y APLICACIONES DEL CÁLCULO INTEGRAL

© Mg. SC. Leandro Antero Huanca Velarde
Ing. Alfredo Demetrio Moreno Llacza

© Universidad Nacional Agraria La Molina
Av La Universidad s/n La Molina

Derechos reservados

ISBN: N° 978-612-4147-01-2

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú:
Registro: N° 2012-06263

Primera Edición: mayo del 2012 - **Tiraje:** 1 000 ejemplares
Impreso en Perú – Printed in Peru

Editor:

María Beatriz Olaya Morales

Diseño, diagramación e impresión:

Q & P Impresores S.R.L
Av. Ignacio Merino 1546 Lince
Telf. 470-1788 - www.qypimpresores.com

Queda terminantemente prohibida por la Ley del Perú la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, químico, óptico, incluyendo sistema de fotocopiado, sin autorización escrita de la Universidad Nacional Agraria La Molina y los Autores.

Todos los conceptos expresados en la presente obra son responsabilidad de los autores.

PRESENTACIÓN

Dice el lema de la Universidad, “quiero cultivar al hombre y al campo”, como una forma de expresar la interrelación entre la cultura y la naturaleza; sabia combinación que garantiza la existencia de la sociedad. Para que ésta se optimice, el hombre ha creado la ciencia, perenne y constante preocupación por su entorno, que garantiza el desarrollo y progreso de los pueblos del mundo.

La Universidad Nacional Agraria La Molina, es el espacio donde se desarrollan estas preocupaciones y retos en un ambiente de debate y consolidación de la técnica, la ciencia y las humanidades. Sus profesores son los principales agentes de la investigación, cuyos resultados son materia de las clases en aulas, y fuera en ella, en foros académicos, donde sale a la luz su excelente preparación e idoneidad experimental.

Bajo estos preceptos y antecedentes, me complace presentar este libro **“Fundamentos y Aplicaciones del Cálculo Integral”** de **Leandro Antero Huanca Velarde** y **Alfredo Demetrio Moreno Llacza**, destacados docentes de nuestra Universidad, quienes en este trabajo demuestran la agudeza de sus investigaciones y comparten sus resultados, como una forma de optimizar el papel de la Universidad para la comunidad universitaria y la sociedad en general.

DR. JESÚS ABEL MEJÍA MARCACUZCO
RECTOR

A G R A D E C I M I E N T O

A nuestros padres EMMA y JULIO, NUNCIA y FRANCISCO, que son la fuente de inspiración, por su amor y todo su apoyo en nuestras vidas.

A mi querida hija SUSANA, que es la razón de mi vida, por todo su amor y comprensión, por ser una persona correcta y solidaria y sembrar en ella la vocación de servicio.

A mis hermanos CIRO, LILLAN, IRENE, GLORIA y ELENA, por todo su inmenso cariño y confianza depositada en mi.

A mis sobrinos, para que sigan los buenos ejemplos de las personas que los rodean y sean perseverantes en alcanzar sus metas.

Para mis grandes amigos SOL y CHESTER.

DEDICATORIA

*Primordialmente, debemos agradecer a DIOS por la vida,
por darnos la oportunidad de ser Docentes y el estar
al servicio de la juventud estudiosa.*

*A nuestras familias, quienes con su aliento, comprensión y apoyo,
nos han permitido hacer realidad esta meta trazada, y en especial a
CONSUELO por su apoyo invaluable y desinteresado.*

*A nuestros estudiantes, quienes con sus ganas de aprender y profundizar
sus conocimientos cultivaron en nosotros el compromiso y la
preocupación de escribir esta obra “Fundamentos y Aplicaciones del
Cálculo Integral” con el fin de entregarla, principalmente, al servicio de
la comunidad molinera y público en general.*

*Asimismo, queremos extender nuestros agradecimientos
a todos los amigos y colegas que de una u otra manera
contribuyeron a la mejora y culminación de la presente obra.*

INDICE

| | | |
|---|--------------------------|-----|
| Presentación | | 13 |
| Prólogo | | 15 |
| Cálculo infinitesimal | | 17 |
| CAPITULO I | | 19 |
| INTEGRAL INDEFINIDA | | |
| 1.1 Integración | | 21 |
| 1.1.1 Antiderivada de una función | | 21 |
| 1.1.2 Interpretación Geométrica de la Antiderivada | | 23 |
| 1.1.3 Integral indefinida | | 24 |
| 1.1.4 Propiedades básicas de la integral indefinida | | 25 |
| 1.2 Integrales inmediatas | | 26 |
| 1.2.1 Teorema del cambio de variable | | 27 |
| Problemas Resueltos | | 31 |
| 1.3 Métodos de integración | | 42 |
| 1.3.1 Integración por partes | | 42 |
| Problemas resueltos | | 43 |
| 1.3.2 Integración de funciones trigonométricas | | 59 |
| 1.3.3 Integración por sustitución trigonométrica | | 74 |
| 1.3.4 Integración por descomposición en fracciones parciales | | 80 |
| 1.3.5 Integrales de funciones racionales del seno y coseno | | 85 |
| Problemas resueltos de integración de funciones | | |
| trigonométricas y por sustitución trigonométrica | | 91 |
| Problemas resueltos de integración por descomposición | | |
| en fracciones parciales y de función racionales del seno | | |
| y coseno | | 100 |
| Problemas propuestos | | 109 |
| CAPITULO II | | |
| | INTEGRAL DEFINIDA | |
| 2.1 Partición | | 127 |
| 2.2 Norma de una partición | | 128 |
| 2.3 Suma de Riemann | | 129 |
| 2.3.1 Interpretación Geométrica de la suma de Riemann | | 130 |
| 2.4 Definición de integral definida | | 130 |
| 2.4.1 Propiedades de la integral definida | | 131 |
| 2.5 Teorema fundamental del Cálculo | | 133 |
| 2.5.1 Primer Teorema Fundamental | | 133 |
| 2.5.2 Segundo Teorema Fundamental | | 134 |
| Problemas resueltos | | 136 |
| 2.6 Integrales impropias | | 146 |
| 2.6.1 Integrales sobre un intervalo de integración no acotado | | 146 |
| 2.6.2 Integrales con integrando no acotado | | 146 |
| Problemas resueltos | | 148 |

| | | |
|---------|------------------------------------|-----|
| 2.7 | Función Gamma y Beta | 154 |
| 2.7.1 | Función Gamma | 154 |
| 2.7.1.1 | Transformación de la función Gamma | 158 |
| 2.7.2 | Función Beta | 159 |
| | Problemas resueltos | 159 |
| 2.7.2.1 | Transformación de la función Beta | 162 |
| | Problemas Resueltos | 162 |
| | Problemas Propuestos | 164 |

CAPITULO III

APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

| | | |
|---------|--|-----|
| 3.1 | Cálculo de áreas de regiones planas | 171 |
| 3.1.1. | Área de una región en coordenadas cartesianas | 171 |
| 3.1.1.1 | Área acotada por una curva | 171 |
| 3.1.1.2 | Área de una región entre dos curvas | 176 |
| 3.1.2. | Área de una región en coordenadas polares | 188 |
| 3.1.2.1 | Área de una región limitada por una curva | 188 |
| 3.1.2.2 | Área de una región entre dos curvas | 190 |
| 3.2 | Longitud de arco de una curva | 195 |
| 3.2.1 | En coordenadas cartesianas | 195 |
| 3.2.2 | En coordenadas polares | 199 |
| 3.2.3 | En coordenadas paramétricas | 201 |
| 3.3 | Volumen de un sólido de revolución en coordenadas cartesianas | 206 |
| 3.3.1 | Método del disco | 206 |
| 3.3.2 | Método del anillo | 212 |
| 3.3.3 | Método de la Corteza Cilíndrica | 225 |
| | Problemas propuestos de Volumen de un Sólido de Revolución | 237 |
| 3.4 | Área de una superficie de revolución | 240 |
| | Problemas Resueltos | 243 |
| | Problemas Propuestos | 247 |
| 3.5 | Aplicaciones físicas | 249 |
| 3.5.1 | Trabajo realizado por una fuerza a lo largo de una trayectoria | 249 |
| 3.5.2 | Momento y centro de masa | 251 |
| 3.5.3 | Teorema de Pappus para volúmenes | 257 |
| | Problemas propuestos | 260 |
| | Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden | 266 |

CAPITULO IV

INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

ORDINARIAS

| | | |
|-------|--------------------------------|-----|
| 4.1 | Ecuación diferencial | 269 |
| 4.1.1 | Ecuación diferencial ordinaria | 269 |

| | | |
|---------|---|------------|
| 4.1.2 | Ecuación diferencial en derivadas parciales | 270 |
| 4.1.3 | Orden de una ecuación diferencial | 270 |
| 4.1.4 | Grado de una ecuación diferencial | 270 |
| 4.1.5 | Soluciones de una ecuación diferencial | 271 |
| 4.2 | Ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado | 273 |
| 4.2.1 | Ecuaciones diferenciales de variables separables | 273 |
| 4.2.1.1 | Ecuaciones diferenciales reducibles a variables Separables | 275 |
| 4.2.2 | Ecuaciones diferenciales homogéneas | 276 |
| 4.2.2.1 | Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas | 278 |
| 4.2.3 | Ecuaciones diferenciales lineales | 280 |
| 4.2.3.1 | Ecuaciones diferenciales reducibles a lineales: Ecuación de Bernoulli | 282 |
| 4.2.4 | Ecuaciones diferenciales exactas | 283 |
| 4.2.4.1 | Ecuaciones diferenciales reducibles a exactas | 285 |
| 4.3 | Aplicaciones | 288 |
| 4.3.1 | Enfriamiento de un cuerpo | 288 |
| 4.3.2 | Trayectorias ortogonales | 290 |
| 4.3.3 | Desintegración radioactiva | 292 |
| 4.3.4 | Dinámica de poblaciones | 293 |
| 4.3.5 | Mezclas químicas | 297 |
| 4.3.6 | Desplazamiento con resistencia proporcional a la velocidad | 300 |
| | Problemas resueltos | 304 |
| | Problemas propuestos | 311 |
| | Problemas de repaso | 314 |
| | • Algunos gráficos importantes (cartesianas y polares) | 323 |
| | Bibliografía | 335 |

PRESENTACIÓN

Las matemáticas ofrecen la posibilidad de describir fenómenos físicos de nuestro entorno, empleando para ello un lenguaje preciso y unas herramientas poderosas bien estructuradas. Es en ese contexto que el cálculo se convierte en una herramienta básica para los científicos e ingenieros ya que permite estudiar de manera sistemática el cambio y la variación, propiedades que están siempre presentes entre magnitudes relacionadas.

El Cálculo Integral es la rama de la matemática que se desarrolla con detalle en este libro y el problema fundamental que lo origina es el denominado problema del área. Las técnicas aquí presentadas para el cálculo de áreas permitirán además calcular longitudes de curvas, volúmenes de sólidos, así como también calcular otras magnitudes físicas tales como el trabajo realizado por una fuerza en una trayectoria y el centro de gravedad de una región plana.

Sin embargo, la aplicación más importante del Cálculo es la solución de Ecuaciones Diferenciales, es decir una ecuación que contiene una función desconocida y algunas de sus derivadas. En el texto se presentan las técnicas desarrolladas para el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias así como aplicaciones interesantes en contextos de las ciencias básicas y de la ingeniería. Respecto a este tema, cabe señalar también que en muchos casos, es imposible hallar la solución de una ecuación diferencial de forma explícita. Es en esas situaciones que conviene recurrir a procedimientos gráficos y numéricos para estudiar la solución. Este campo es interesante porque permite romper el paradigma de una matemática exacta que resume todos sus resultados en fórmulas. El análisis cualitativo es necesario y en ese contexto, las herramientas informáticas resultan muy útiles.

En este texto se ha logrado complementar eficientemente la información teórica con problemas pertinentes y graduados en dificultad. De esta manera, los estudiantes podrán familiarizarse con estos importantes tópicos que serán herramientas fundamentales en cursos posteriores. Así, este trabajo será de mucha utilidad para estudiantes y profesores del área de ciencias e ingeniería.

Expreso mi felicitación a los autores Leandro Huanca y Alfredo Moreno por la excelente labor de organización de los temas en este libro sobre *Cálculo Integral*. Es una muestra de su generosidad y el resultado de un trabajo reflexivo que ha tenido como base la experiencia del dictado del curso durante varios años.

Mg. Cecilia Gaita

Coordinadora de la Maestría en Enseñanza de la Matemática
Pontificia Universidad Católica del Perú 2010

PRÓLOGO

El estudio de la teoría y práctica que se imparte en el curso de Cálculo Integral en el Departamento Académico de Matemática de la Facultad de Ciencias de nuestra Universidad, y que su conocimiento constituye una herramienta imprescindible en todas las carreras de ingeniería, ciencias, estadística, economía y administración; fue la motivación de los autores para elaborar el texto titulado “Fundamentos y Aplicaciones del Cálculo Integral”, el cual ha sido desarrollado íntegramente de acuerdo al syllabus del curso que se desarrolla en la Universidad Nacional Agraria La Molina.

Los autores hemos puesto toda nuestra experiencia para que este trabajo este al servicio de nuestros estudiantes y en general de todas las personas que desean conocer acerca del tema.

Hoy, presentamos la obra “Fundamentos y Aplicaciones del Cálculo Integral” con el objetivo principal que sea para nuestros estudiantes un material que refuerce la teoría y práctica impartida en clase. De esta manera, buscamos fortalecer el vacío que existe en los procesos de enseñanza-aprendizaje, y contribuir para alcanzar su fácil y mejor aprendizaje. Para este fin, primero analizamos, desarrollamos y aplicamos los conceptos básicos a una serie de ejercicios resueltos y luego proponemos una serie de ejercicios de diferentes grados de dificultad con sus respectivas respuestas para que el estudiante compruebe su avance en su aprendizaje de cada tema.

Es así, que pretendemos que este texto sea una herramienta de trabajo práctica, comprensible y de mucha utilidad para estudiantes y colegas del área.

El trabajo consta de cuatro capítulos, cada uno con ejercicios resueltos y propuestos, los cuales fueron minuciosamente seleccionados de acuerdo al contenido de cada capítulo. Es así que:

En el capítulo I: se aprende a resolver Integrales Indefinidas, aplicando los métodos de integración.

En el capítulo II: vemos la Integral Definida, interpretación geométrica, propiedades, teoremas fundamentales del Cálculo, Integrales Impropias y funciones Gamma y Beta.

En el capítulo III: hacemos las aplicaciones al cálculo de áreas en regiones planas, volúmenes de sólidos, longitud de arco, áreas de superficie de revolución y aplicaciones físicas al trabajo y centro de masa.

En el capítulo IV: hacemos una introducción a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden, que tiene como fin resolver una ecuación diferencial e introducirnos en la interpretación de modelos matemáticos sencillos aplicados a la Biología, Economía, Física e Ingeniería.

Los autores, quedamos agradecidos a Dios, al Departamento de Matemática y a la Universidad Agraria, por la labor de difusión de publicaciones de sus Docentes, que nos permite en este caso, poner a disposición de todos los interesados, este texto, que esperamos que sea de mucha utilidad y que contribuya en su formación profesional.

Mg. Sc. Leandro A. Huanca Velarde lhuanca@lamolina.edu.pe

Ing. Alfredo D. Moreno Llacza amoreno@lamolina.edu.pe

EL CÁLCULO INFINITESIMAL

El cálculo infinitesimal es, sin duda, la herramienta más potente y eficaz para el estudio de la naturaleza. Los orígenes del cálculo integral se remontan concretamente a los cálculos de áreas y volúmenes que Arquímedes calculó en el siglo III a.C. Aunque hubo que esperar mucho tiempo hasta el siglo XVII, para que apareciera o mejor, como Platón afirmaba para que se descubriera el cálculo. Varias son las causas de semejante retraso. Entre ellas debemos destacar la inexistencia de un sistema de numeración adecuado en este caso el decimal así como del desarrollo del álgebra simbólica y la geometría analítica que permitieron el tratamiento algebraico y no geométrico de las curvas posibilitando enormemente los cálculos de tangentes, cuadraturas, máximos y mínimos, entre otros. Todo ello ocurrió esencialmente en el siglo XVII.

La genial idea de Arquímedes fue considerar las áreas como una colección necesariamente infinita de segmentos. Otro matemático en este caso Cavalieri volvió a usar de esa manera los infinitos. De hecho Leibniz descubrió la clave de su cálculo al ver un trabajo de Pascal donde éste usaba un método semejante. En el libro la *Opera Omnia* de Arquímedes donde describe el método de sus infinitos segmentos para cuadrar la parábola usando una palanca y moviendo convenientemente los correspondientes segmentos hasta que ambas figuras, triángulo y parábola quedasen equilibradas.

Como ya se mencionó una razón importante de la aparición del cálculo fue la aparición de una adecuada representación para los números. Se trata de la representación decimal cuyo primer registro escrito en el mundo occidental es mostrado en la sección dedicada a las matemáticas en la península ibérica. Junto a Viète, uno de los principales impulsores de la idea fue Simon Stevin del cual admiramos *Les oubres mathematiques* (Leiden, 1634) especialmente abierto en la primera página de *La Disme* donde Stevin desarrolla su aritmética decimal. También Stevin uso distintos argumentos infinitesimales para calcular centros de gravedad. No obstante fue la necesidad de entender obras griegas difíciles como las de Arquímedes ya en el siglo XVII se habían recuperado y se dominaban la mayoría de las obras griegas, por ejemplo la edición de las obras de Arquímedes debida a Wallis justamente abierta éste da su famosa estimación de π usando polígonos regulares inscritos y circunscritos a la circunferencia que desembocó en el nacimiento del cálculo. Aunque también ayudó un cambio de actitud en la matemática del siglo XVII quizá influenciada por los grandes descubrimientos de todo tipo geográficos, científicos, médicos y tecnológicos y fue el interés de los matemáticos por descubrir más que por dar pruebas rigurosas.

Barrow fue probablemente el científico que estuvo más cerca de descubrir el cálculo. Llegó a las matemáticas en su afán de comprender la teología de hecho se marchó de su cátedra en Cambridge, cediéndosela a Newton para continuar

sus estudios teológicos. En la lección X de su obra *Lectiones opticae & geometricae* Barrow demuestra su versión geométrica del Teorema fundamental del cálculo.

En el último cuarto del siglo XVII, Newton y Leibnitz, de manera independiente, sintetizaron los métodos infinitesimales usados por sus predecesores, dos conceptos, los que hoy se llaman la derivada y la integral, desarrollaron unas reglas para manipular la derivada (reglas de derivación) y mostraron que ambos conceptos eran inversos (teorema fundamental del cálculo), de esta manera acababa de nacer el cálculo infinitesimal.